Práctica 5

Planificación de Trayectorias

5.1.-Introducción

Una vez obtenidos los modelos cinemáticos y dinámicos del robot se puede abordar el problema del control de los mismos. Definir el movimiento de un robot implica controlar dicho robot de manera que siga un camino preplanificado. El objetivo es por tanto establecer cuales son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para conseguir los objetivos fijados, a la vez que se exige cumplir una serie de restricciones físicas impuestas por los actuadores y de calidad de la trayectoria, como son suavidad, precisión, etc.

Para un estudio más estructurado del problema de control del robot, éste suele dividirse en dos bloques:

- *Control cinemático o planificación de trayectorias*. Consiste en describir el movimiento deseado del manipulador como una secuencia de puntos en el espacio (con posición y orientación). El control cinemático interpola el camino deseado mediante una clase de funciones polinomiales y genera una secuencia de puntos a lo largo del tiempo.
- *Control dinámico o control de movimiento*. Trata de conseguir que el robot siga realmente las trayectorias marcadas por el control cinemático teniendo en cuenta las limitaciones de los actuadores y el modelo dinámico del robot. Tal y como se estudió en la práctica 3, el modelo dinámico del robot es fuertemente no lineal, multivariable y acoplado. Este aspecto del control será abordado en la práctica 6 de simulación y control de robots.

Esta práctica aborda el control cinemático del robot, revisando los conceptos de planificación de trayectorias y las herramientas necesarias para la interpolación polinomial entre los puntos de inicio y final del camino. En primer lugar se presenta un esquema general del problema de la planificación, más tarde se distingue entre el espacio cartesiano y el espacio de las articulaciones del robot para poder abordar en ellos los problemas de interpolación entre puntos espaciales. Se presenta en el apartado 5.4 un método de interpolación 4-3-4 válido en muchos casos como esquema de interpolación. Finalmente se utilizan las herramientas desarrolladas en un ejemplo.

5.2.-Esquema General de Planificación de Trayectorias.

En la práctica 2 se presentó la función PLANIFICA6 en la cual se mostraba una animación del robot rotacional de 6 gdl. Para realizar esta animación se necesitó realizar una planificación simple de la trayectoria que debía seguir el robot. En aquel caso no se tuvo en consideración ninguna restricción sobre el camino que debía trazar el robot, y simplemente se obtuvieron una serie de posiciones por las que fue pasando el robot cuando se resolvía su cinemática inversa. En ningún momento se tuvo en cuenta la realidad física de los actuadores que proporcionan el movimiento a los eslabones, y sus limitaciones de proporcionar velocidades instantáneas con aceleraciones infinitas. Asimismo en aquel ejemplo tan sólo se consideró la planificación en posición, sin observar los cambios en la orientación de la herramienta.

La realidad del problema de planificación de trayectorias exige sin embargo tener en consideración las prestaciones reales de los actuadores, de tal manera que el movimiento del robot sea un movimiento suave y coordinado.

Para llegar a obtener un planificador que funcione correctamente, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Estudiar las necesidades de movimiento especificadas por el usuario o por los sensores propios del sistema robotizado, evitando colisiones con el entorno etc., obteniendo una expresión analítica en coordenadas cartesianas de la trayectoria deseada en función del tiempo (libre de colisiones).
2. Muestrear la trayectoria anterior en una serie finita de *puntos nudo* de control que se utilizan como puntos inicial y final de cada segmento. Cada uno de estos puntos está especificado por sus componentes cartesianas de posición y orientación $(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$.
3. Pasar cada uno de estos puntos a coordenadas articulares del robot, utilizando para ello la transformación homogénea inversa estudiada en la práctica 2.
4. Realizar la interpolación entre los puntos de las coordenadas articulares y obtener para cada articulación una expresión del tipo $q_i(t)$ para cada segmento de control.

Se observa que un planificador consiste en obtener una función de trayectoria $q(t)$ que se modifica en cada intervalo de control.

Hay que hacer notar que el paso 3 debe tratarse con cuidado, pues hay que tener en cuenta las posibles soluciones múltiples de la transformación inversa, como se vio en el ejemplo 2.6 de la práctica 2, así como la posible existencia de configuraciones singulares que impidan la continuidad de la trayectoria deseada.

Una posible variación de este esquema es realizar el estudio de las necesidades de movimiento en el espacio de las articulaciones del robot, con la ventaja de que se está realizando sobre las variables a controlar directamente y que se evita la utilización intensiva de las transformaciones homogéneas inversas, pero tiene la dificultad de que es difícil realizar un movimiento libre de colisiones al ser éstas difíciles de detectar trabajando con coordenadas articulares. Además las coordenadas articulares no distinguen entre posición y orientación.

Si consideramos el planificador de trayectorias como un bloque de control, encontramos el esquema siguiente:

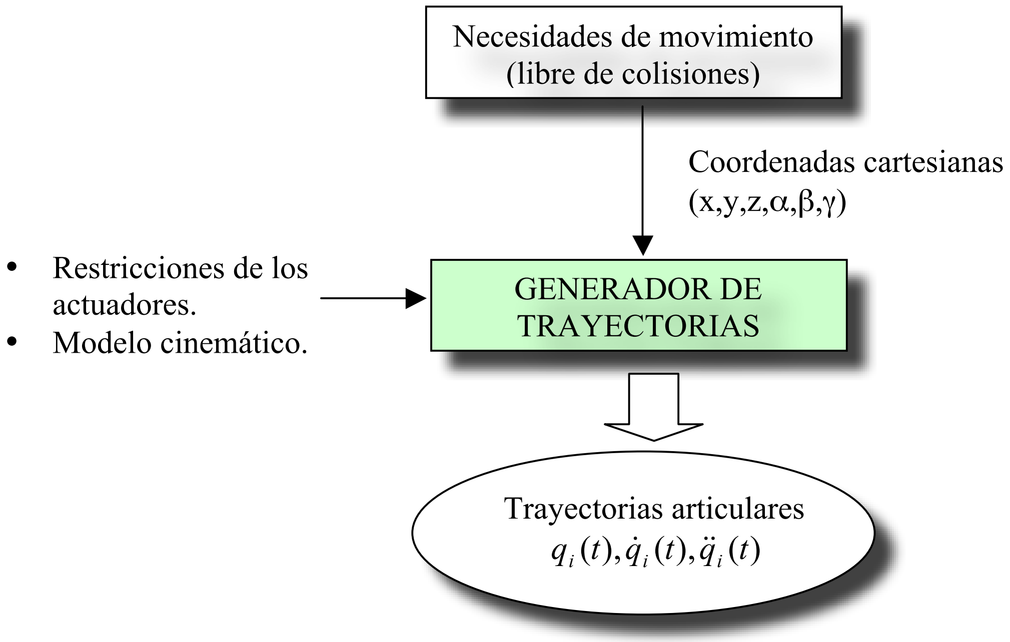


Figura 5.1. Esquema general del control cinemático.

5.2.1.- *Espacio cartesiano y Espacio articular*

La siguiente figura pretende clarificar al lector el esquema de planificación de trayectorias presentado. En ella se muestra un ejemplo de un robot de 2 gdl. Se quiere que el robot se mueva en línea recta desde la posición cartesiana j^1 hasta j^4. Para ello se añaden como puntos auxiliares j^2 y j^3 en el espacio cartesiano. Cada uno de estos puntos nudo se pasan al espacio articular (en este caso bidimensional). El siguiente paso es realizar la interpolación en el espacio articular, encontrando un polinomio que cumpla con las especificaciones requeridas. La trayectoria cartesiana del robot pasará en este caso por los puntos nudo, si bien entre ellos puede ser que no realice una trayectoria perfectamente recta.

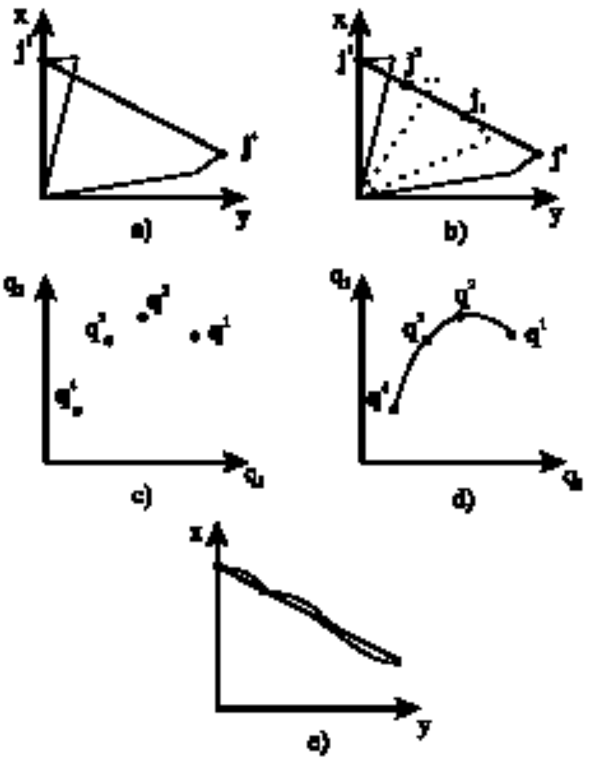


Figura 5.2. Espacio cartesiano y espacio articular.

5.3.-Tipos de Trayectorias.

La mejora tecnológica ha permitido que los robots puedan realizar trayectorias cada vez más complejas, al poder ser éstas calculadas previamente. A continuación se cita brevemente una clasificación de tipos de trayectorias de robots comerciales clásicos.

- Trayectorias punto a punto.

En este tipo de trayectorias cada articulación se mueve independientemente, sin considerar el efecto del resto de las articulaciones. Dentro de esta tipo se engloban las trayectorias con movimiento eje a eje y las de movimiento simultáneo de ejes. En las trayectorias con movimiento eje a eje en primer lugar se actúa sobre un motor, y cuando este ha finalizado su recorrido, se activa el siguiente motor. Este tipo de movimiento tiene como única ventaja el ahorro energético.

- Trayectorias coordinadas o isocronas.

En este tipo de trayectorias se procura que el movimiento de todos los actuadores sea coordinado e isocrona. Esto quiere decir que el actuador que tarda más tiempo en alcanzar la posición requerida ralentiza al resto, de manera que ningún movimiento acaba antes que el de otra articulación. El tiempo total invertido en el movimiento es el menor posible, y los requerimientos de velocidad y aceleración de los motores son menores que en otro tipo de movimiento. El inconveniente de este tipo de planificadores es que la trayectoria que describe el extremo del robot es desconocida a priori. El esquema de planificador que se explica en el siguiente apartado corresponde a este tipo de planificadores.

- Trayectorias continuas.

  En este tipo de trayectorias se pretende que el camino seguido por el extremo del robot sea conocido. Para ello las trayectorias articulares deben acomodarse conjuntamente. Cada articulación por separado parece tener un movimiento desordenado, sin embargo el resultado es que el extremo se mueve siguiendo el camino previsto.

5.4.-.Interpolación. Cálculo de una trayectoria 4-3-4.

Siguiendo con el esquema general presentado en el apartado 5.2 se va a desarrollar en ***MatLab*** ® una herramienta de interpolación en el espacio de las variables articulares que proporciona resultados aceptables con trayectorias de articulación suaves. La trayectoria de la articulación se divide en algunos segmentos de trayectoria y cada uno de éstos se ajusta mediante un polinomio de bajo grado.

Se parte del supuesto que se conoce la posición y orientación de dos puntos nudos en coordenadas cartesianas $(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$. Se quiere que el robot evolucione desde el punto inicial al punto final en un tiempo conocido. Asimismo se tiene una serie de especificaciones máximas en los motores de las articulaciones. De acuerdo con el esquema general, el paso siguiente es obtener las coordenadas articulares de los puntos inicial y final.

Este primer paso se resuelve con las herramientas desarrolladas en la práctica 2, concretamente con la solución de la cinemática inversa. En el caso del robot rotacional de 6 gdl se ha estudiado que la solución de la cinemática inversa puede ser múltiple. Además debe tenerse en cuenta la posible existencia de singularidades en alguna de las configuraciones del robot.

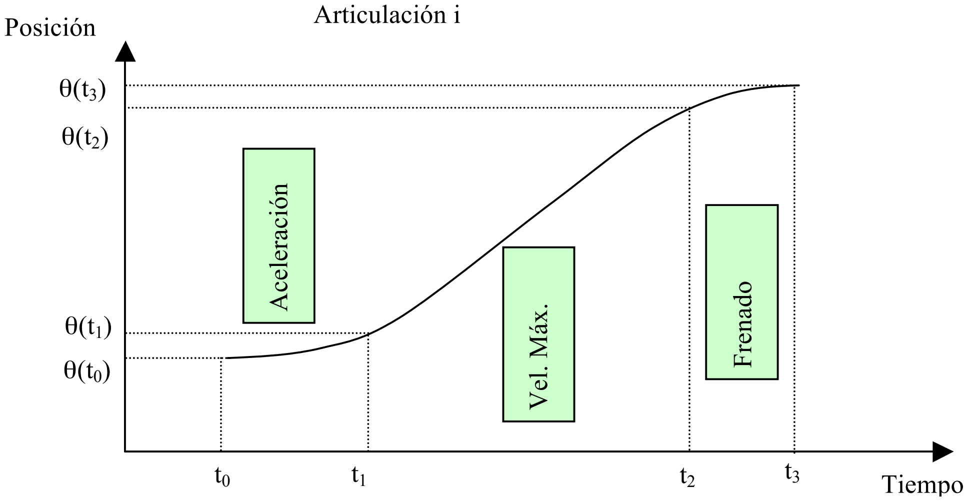
En segundo lugar, debe hallarse un polinomio interpolador entre los dos puntos nudos que cumpla con las especificaciones de los actuadores y que proporcione un movimiento suave al robot. Como se ha visto anteriormente, este punto puede ser abordado bajo varios enfoques y diferentes tipos de trayectorias. Cada enfoque produce un resultado distinto pero igualmente válido dependiendo de los requerimientos del usuario. Se puede pretender que el robot siga una determinada trayectoria en línea recta o mover el manipulador a lo largo de una trayectoria polinomial uniforme que satisface las ligaduras de posición y orientación en ambos puntos extremos.

Se remite al lector a la literatura específica en la cual encontrará varios ejemplos con distintos enfoques en los que se utiliza desde interpoladores lineales simples hasta series de polinomios encadenados que satisfacen todas las restricciones de la trayectoria.

Se muestra a continuación un método para obtener trayectorias de articulación interpoladas que ofrecen un resultado físicamente realizable. Los perfiles de aceleración y velocidad obtenidos para cada articulación son realizables por actuadores comerciales. La trayectoria obtenida es del tipo isocrona.

5.4.1.- *Trayectorias de articulación interpolada*

Con el objetivo de que el movimiento del robot sea suave y esté de acuerdo con las restricciones de los actuadores se divide cada trayectoria articular en tres segmentos, correspondientes a la aceleración del motor, el periodo de velocidad máxima y la deceleración o frenado del motor. La gráfica siguiente muestra esta división en la que se puede observar como los periodos de aceleración y frenado ofrecen un movimiento suave del robot.



Las restricciones en los puntos de control que se utilizan para resolver el cálculo de los polinomios interpoladores son las siguientes:

⇒ Posición inicial (t_0)
- Posición $\theta(t_0)$
- Velocidad inicial (normalmente nula)
- Aceleración inicial (normalmente nula)

⇒ Posición intermedia (t_1)
- Posición $\theta(t_1)$
- Continuidad en posición
- Continuidad en velocidad
- Continuidad en aceleración

⇒ Posición intermedia (t_2)
- Posición $\theta(t_2)$
- Continuidad en posición
- Continuidad en velocidad
- Continuidad en aceleración

⇒ Posición final (t_3)
- Posición $\theta(t_3)$
- Velocidad final (normalmente nula)
- Aceleración final (normalmente nula)

Se pueden encontrar en la literatura específica muchos polinomios que permiten cumplir con las anteriores restricciones. Una de estas soluciones es la combinación 4-3-4 [1] que se explica brevemente a continuación.

5.4.2.- *Polinomios 4-3-4*

Utilizando este tipo de polinomios interpoladores se tiene los siguientes tres segmentos de trayectorias para cada articulación:

- 1er segmento de trayectoria. Es un polinomio de cuarto grado que especifica el intervalo de aceleración del motor.

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \tag{5.2}$$

- 2º segmento de trayectoria. Es un polinomio de tercer grado que especifica la trayectoria desde la primera posición intermedia (t_1) hasta la posición t_2.

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \tag{5.3}$$

- 3er segmento de trayectoria. Es un polinomio de cuarto grado que especifica la trayectoria durante el período final de frenado del motor.

$$h_3(t) = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30} \tag{5.4}$$

En primer lugar hay que considerar que al estar hallando las trayectorias articulares para las N articulaciones del manipulador, es conveniente introducir una variable de tiempo normalizada $t \in [0,1]$, que permita simplificar los cálculos al evitar tener que contabilizar los desfases temporales, de tal manera que t=0 corresponda al inicio de cualquiera de los tres segmentos en que se ha dividido el camino y t=1 corresponda al final del segmento de trayectoria.

Matemáticamente, este cambio de variable queda expresado como:

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \tag{5.5}$$

Donde:

t	variable de tiempo normalizado, $t \in [0,1]$
τ	tiempo real en segundos
τ_i	tiempo real la final del segmento de trayectoria i-ésimo

Las siguientes expresiones permiten obtener las relaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes de los tres polinomios buscados. Estas expresiones se obtienen aplicando la regla de la cadena con el cambio de variable temporal descrito anteriormente:

$$v_i = \frac{1}{t_i}\dot{h}_i(t) \tag{5.6}$$

$$a_i = \frac{1}{t_i^2}\ddot{h}_i(t) \tag{5.7}$$

Cálculo de los coeficientes.

Primer segmento de trayectoria. Aceleración

De las ecuaciones (5.2),(5.6)y (5.7) se obtienen las expresiones:

$$v_1 = \frac{1}{t_1}\dot{h}_1(t) = \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t^2 + a_{11}}{t_1} \tag{5.8}$$

$$a_1 = \frac{1}{t_1}\ddot{h}_1(t) = \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \tag{5.9}$$

aplicando las condiciones de contorno para t=0 y t=1:

$$a_{10} = h_1(0) = \theta_0 \tag{5.10}$$

$$v_0 = \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \frac{a_{11}}{t_1} \tag{5.11}$$

$$a_0 = \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \frac{2a_{12}}{t_1^2} \tag{5.12}$$

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + \left(\frac{a_0t_1^2}{2}\right)t^2 + (v_0t_1)t + \theta_0 \tag{5.13}$$

$$v_1(1) = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + a_0t_1^2 + v_0t_1}{t_1} \tag{5.14}$$

$$a_1(1) = \frac{12a_{14} + 6a_{13} + a_0t_1^2}{t_1^2} \tag{5.15}$$

Segundo segmento de trayectoria. Velocidad Máxima

Aplicando las condiciones de contorno para t=0 y t=1 para los puntos intermedios se obtienen las siguientes relaciones:

$$a_{20} = h_2(0) = \theta_2(0) \tag{5.16}$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{a_{21}}{t_2} \tag{5.17}$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} \tag{5.18}$$

$$v_2(1) = \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2} \tag{5.19}$$

$$a_2(1) = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2} \tag{5.20}$$

y aplicando continuidad:

$$\frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \tag{5.21}$$

de donde se obtienen las igualdades siguientes:

$$\frac{-a_{21}}{t_2} + \frac{4a_{14}}{t_1} + \frac{3a_{13}}{t_1} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1} + \frac{v_0 t_1}{t_1} = 0 \tag{5.22}$$

$$\frac{-2a_{22}}{t_2^2} + \frac{12a_{14}}{t_1^2} + \frac{6a_{13}}{t_1^2} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1^2} = 0 \tag{5.23}$$

Tercer segmento de trayectoria. Frenado

Para aplicar más cómodamente las condiciones de contorno conviene realizar un cambio de variable, sustituyendo $\bar{t} = t - 1$ por t en la ecuación (5.4), de tal manera que $\bar{t} = 0$ corresponde al instante final del segmento y $\bar{t} = -1$ al instante inicial. La ecuación que gobierna este segmento pasa a formularse como:

$$h_3(\bar{t}) = a_{34}\bar{t}^4 + a_{33}\bar{t}^3 + a_{32}\bar{t}^2 + a_{31}\bar{t} + a_{30} \qquad \text{con } \bar{t} \in [-1,0] \tag{5.24}$$

Aplicando las condiciones para $\bar{t} = 0$ y $\bar{t} = -1$

$$a_{30} = h_3(0) = \theta_f \tag{5.25}$$

$$v_f = \frac{\dot{h}_3(0)}{t_3} = \frac{a_{31}}{t_3} \tag{5.26}$$

$$a_f = \frac{\ddot{h}_3(0)}{t_3^2} = \frac{2a_{32}}{t_3^2} \tag{5.27}$$

$$\frac{\dot{h}_3(-1)}{t_3} = \frac{-4a_{34} + 3a_{33} - a_f t_3^2 + v_f t_n}{t_3} \tag{5.28}$$

$$\frac{\ddot{h}_3(-1)}{t_3^2} = \frac{12a_{34} - 6a_{33} + a_f t_3^2}{t_3^2} \tag{5.29}$$

y aplicando continuidad:

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{\dot{h}_3(-1)}{t_3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_3(-1)}{t_3^2} \tag{5.30}$$

$$\frac{4a_{32} - 3a_{33} + a_f t_3^2 - v_f t_3}{t_3} + \frac{3a_{23}}{t_2} + \frac{2a_{22}}{t_2} + \frac{a_{21}}{t_2} = 0 \tag{5.31}$$

$$\frac{-12a_{34} + 6a_{33} - a_f t_3^2}{t_3^2} + \frac{6a_{23}}{t_2^2} + \frac{6a_{22}}{t_2^2} = 0 \tag{5.32}$$

Otras relaciones

El ángulo recorrido por la articulación en cada segmento puede escribirse como:

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_0 = h_1(1) - h_1(0) = a_{14} + a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 \tag{5.33}$$

$$\delta_2 = \theta_2 - \theta_1 = h_2(1) - h_2(0) = a_{23} + a_{22} + a_{21} \tag{5.34}$$

$$\delta_3 = \theta_3 - \theta_2 = h_3(0) - h_3(-1) = -a_{34} + a_{33} - \frac{a_f t_3^2}{2} + v_f t_3 \tag{5.35}$$

Rescribiendo en notación matricial las ecuaciones (5.22), (5.23), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35) se obtiene:

$$y = Cx \tag{5.36}$$

donde:

$$y = \left(\delta_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - v_0 t_1, -a_0 t_1 - v_0, -a_0, \delta_2, -a_f t_3 + v_f, a_f, \delta_3 - \frac{a_f t_3^2}{2} - v_f t_3 \right)^T$$

$$x = (a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, a_{34})^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/t_1 & 4/t_1 & -1/t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/t_1^2 & 12/t_1^2 & 0 & -2/t_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_2 & 2/t_2 & 3/t_2 & -3/t_3 & 4/t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/t_2^2 & 6/t_2^2 & 6/t_3^2 & -12/t_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se calculan todos los coeficientes de los tres polinomios 4-3-4 que definen la trayectoria.

5.4.3.- *Código en MatLab®*

Se presenta a continuación el código en MatLab® desarrollado por los autores que permite obtener los polinomios $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$ a partir de unas posiciones inicial y final dadas en coordenadas articulares del robot y de las características de los actuadores.

Por defecto se ha considerado que la articulación con una solicitud temporal más exigente frenará al resto de actuadores, trazándose por tanto la trayectoria más corta posible entre los puntos inicial y final. Para ello se ha escrito la función SINCRONIZADOR que calcula la nueva velocidad máxima de cada motor necesaria para sincronizar las trayectorias articulares. Conocidas las posiciones iniciales y finales de las articulaciones y la velocidad máxima de los motores que las accionan, se recalculan estas velocidades máximas admisibles que proporcionan un movimiento coordinado. La función SINCRONIZADOR se muestra a continuación:

```
%  SINCRONIZADOR Funcion que sincroniza los movimientos teniendo en
consideración
%  las condiciones iniciales, finales, características de las articulaciones y
%  velocidades nominales.
%     [VELO2,TMAXIMO]=SINCRONIZADOR(Q0,QF,VELO) devuelve la nueva velocidad
%     máxima de cada
%     motor.
%     Q0 posición inicial (coordenadas articulares).
%     QF posición final (coordenadas articulares).
%     VELO velocidad máxima nominal de cada actuador.
%
%     Ver también PLANIFICADOR, CALCULOCOEF, SINCRONIZADOR, EVALPOS, EVALACEL.

function [velo2,tmaximo]=sincronizador(q0,qf,velo)

%--Calculo de tiempos aproximados.
taprox = abs((qf(:,1)-q0(:,1)))./velo;
tmaximo = max(taprox);

%--Nueva velocidad maxima de cada motor.
velo2=(qf(:,1)-q0(:,1))/tmaximo;

return
```

En la función CALCULOCOEF que se muestra a continuación se han contemplado los casos en que un motor no necesite alcanzar su velocidad máxima durante la trayectoria, debido a que el recorrido que debe efectuar es pequeño (o incluso nulo). En estos casos el perfil de velocidades no tendrá la típica forma de trapecio, dado que los tres segmentos de trayectoria se reducirán a dos.

```
%  CALCULOCOEF Función de cálculo de los coeficientes de los polinomios 4-3-4.
%
%     [CASO, A ,TT]=CALCULOCOEF(ELEM,VEL,Q0,QF,TMOTOR) calcula los
coeficientes
%     de los polinomios interpolados 4-3-4 en base a las especificaciones de
%     los actuadores y los puntos de inicio y final.
% La matriz A de 5x3 contiene los coeficientes de los polinomios interpolados.
%  TT es el vector 3x1 de los intervalos de tiempo de aceleración, velocidad
%     maxima y deceleración de los motores.
%     caso=1: Cada motor logra alcanzar su velocidad maxima.
%     caso=2: No hay tiempo de alcanzar la velocidad maxima de cada motor.
%
%     Ver también PLANIFICADOR, SINCRONIZADOR, EVALPOS, EVALVEL, EVALACEL.


function [caso,A,tt] = calculocoef(elem,vel,q0,qf,tmotor)

%-----------------------------------------------------------------------
%Tiempos de respuesta del motor (aceleración y frenado)
%-----------------------------------------------------------------------
ti = tmotor(elem,1);
tf = tmotor(elem,2);

%-----------------------------------------------------------------------
%Cálculo de los coeficientes.
%-----------------------------------------------------------------------
```

```
if vel(elem) ~= 0
   %-Determinacion del caso
   desp = (qf(elem,1) - q0(elem,1));
   ttot = abs(desp/vel(elem));
   if ttot > (ti + tf)
      caso = 1;
   else
      caso = 2;
   end;

%****************************** CASO 1*******************************
   if caso == 1

   %vector de tiempo: Arranque - Velocidad Max - Desaceleracion
   tt = [ ti ttot-(ti+tf) tf ];

   %Determinacion de los coeficientes polinomiales
   A = zeros(3,5);

%Coeficientes del polinomio de posicion
A(1,1) = q0(elem,1);
A(1,2) = q0(elem,2)*tt(1);
A(1,3) = q0(elem,3)*tt(1)^2/2;
A(1,4) = tt(1)*vel(elem) - A(1,2) - 4*A(1,3)/3;
A(1,5) = -tt(1)*vel(elem)/2 + A(1,2)/2 + A(1,3)/2;



%Coeficientes del polinomio de aceleracion
A(3,1) = qf(elem,1);
A(3,2) = qf(elem,2)*tt(3);
A(3,3) = qf(elem,3)*tt(3)^2/2;
A(3,4) = tt(3)*vel(elem) - A(3,2) + 4*A(3,3)/3;
A(3,5) = (tt(3)*vel(elem) - A(3,2) + A(3,3))/2;

%Espacio recorrido en los anteriores intervalos
x1 = A(1,2) + A(1,3) + A(1,4) + A(1,5);
x3 = A(3,2) - A(3,3) + A(3,4) - A(3,5);
x2 = qf(elem,1) - q0(elem,1) - ( x1 + x3);

%Tiempo real a velocidad maxima.
tt(2) = x2/vel(elem);

%Coeficientes del polinomio de velocidad.
A(2,1) = A(1,1) + A(1,2) + A(1,3) + A(1,4) + A(1,5);
A(2,2) = vel(elem)*tt(2);

%******************************** CASO 2*****************************
elseif caso == 2

t  = (ti + tf)/2;
tt = [ t t ];
A  = zeros(2,5);

% Arranque del motor.
A(1,1) = q0(elem,1);
A(1,2) = q0(elem,2)*tt(1);
A(1,3) = q0(elem,3)*tt(1)^2/2;

% Desaceleracion del motor.
A(2,1) = qf(elem,1);
```

```
A(2,2) = qf(elem,2)*tt(2);
A(2,3) = qf(elem,3)*tt(2)^2/2;

% Los polinomios para este caso son de quinto orden.
B = [     1            1             1           -1;
     6/tt(1)^2     12/tt(1)^2        0             0;
      3/tt(1)       4/tt(1)      -3/tt(2)      4/tt(2);
         0             0        -6/tt(2)^2  12/tt(2)^2 ];

b = [ -A(1,1) + A(1,2) + A(1,3) + A(2,1) - A(2,2) + A(2,3);
                     -2*A(1,3)/tt(1)^2;
      -(A(1,2) + 2*A(1,3))/tt(1) + (A(2,2) - 2*A(2,3))/tt(2);
                     -2*A(2,3)/tt(2)^2                       ];

x = inv(B)*b;

% Coeficientes 4 y 5 de cada segmento.
A(1,4) = x(1);
A(1,5) = x(2);

A(2,4) = x(3);
A(2,5) = x(4);

end;

% Para cuando el motor no se mueve.
else
 caso = 2;
 tt = [0 0 0];
 A = zeros(2,5);
end;

return
```

⇒ El lector debe notar la redefinición del segundo elemento del vector TT que define los intervalos de tiempo de aceleración, velocidad máxima y frenado en el caso 1, ajustando la aproximación que se había realizado con la variable TTOT.

La función PLANIFICADOR hace uso de las funciones definidas anteriormente, y permite obtener los polinomios $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$. Debe observarse que en el interior de esta función se encuentran los parámetros de los actuadores del robot. Se han introducido valores estándar para articulaciones robotizadas como son velocidades máximas de π/3 radianes/seg. (1.0472 rad/seg.) y tiempos de aceleración y frenado de 0.1 seg.

```
%   PLANIFICADOR Planificador de trayectorias con interpolador 4-3-4.
%
%       [T,POS_PLAN, VEL_PLAN, ACE_PLAN]=PLANIFICADOR(Q1,Q2) calcula las
matrices
%       de posición, velocidad y aceleración de los puntos nudo que representan
%       la planficiación de trayectorias entre los punto Q1 y Q2 cumpliendo con
%       las restricciones de trayectoria suave y prestaciones de los actuadores.
%       Utiliza los polinomios 4-3-4 en los tres segmentos de trayectoria.
%
%       Ver también CALCULOCOEF, SINCRONIZADOR, EVALPOS, EVALVEL, EVALACEL.

function [t, pos_plan, vel_plan, ace_plan] = planificador(q1,q2)

%*********************parámetros de los accionamientos*************

%--------------------------------------------------------------------
% Especificaciones de los tiempos de arranque y frenado de cada motor.
%--------------------------------------------------------------------

tmotor = 0.1*ones(6,2);

%--------------------------------------------------------------------
%Velocidades Maxima de cada motor.
%--------------------------------------------------------------------

velmax = [1.0472;1.0472;1.0472;1.0472;1.0472;1.0472];

%*********************planificador coordinado**********************

%--------------------------------------------------------------------
% Inicialización de los vectores posicion - Velocidad - aceleracion.
%--------------------------------------------------------------------

q  = zeros(6,1);
q0 = [q1 q q];
qf = [q2 q q];

%--------------------------------------------------------------------
% Sincronización de los motores para que realizen un movimiento
coordinado
%--------------------------------------------------------------------

[velo2,tmaximo]=sincronizador(q0,qf,velmax);

%--------------------------------------------------------------------
%Inicialización de la escala de tiempo y las matrices.
%--------------------------------------------------------------------

t = 0:0.01:(tmaximo+0.15);

% +0.15 se suma con el fin de aumentar el intervalo de tiempo y
muestrear
% todo el intervalo de frenado de la articulación, asumiendo las
% aproximaciones realizadas en la función SINCRONIZADOR.

ini=zeros(length(t),1);
pos_plan(:,1)=ini;
vel_plan(:,1)=ini;
ace_plan(:,1)=ini;

%--------------------------------------------------------------------
```

```
% Cálculo de los coeficientes de los polinomios y evaluación de los
% polinomios de interpolación.
%-------------------------------------------------------------------

for i = 1:6
   [caso,A,tt] = calculocoef(i,velo2,q0,qf,tmotor);
   posi=evalpos(t,tt,caso,A);
   pos_plan(:,i)=posi';
   ve=evalvel(t,tt,caso,A);
   vel_plan(:,i)=ve';
   ace=evalacel(t,tt,caso,A);
   ace_plan(:,i)=ace';
end;

return
```

Finalmente se han desarrollado unas funciones que evalúan los polinomios en los puntos estudiados de acuerdo a los coeficientes calculados, permitiendo la representación gráfica de los resultados. Estas funciones son EVALPOS, EVALVEL y EVALACEL. Se muestra a continuación la función EVALPOS que evalúa la posición de la articulación. Las otras funciones las proporcionará el profesor en durante la sesión de prácticas.

```
%   EVALPOS Funcion que evalua el polinomio de la funcion de posición de
%   acuerdo al caso y al tiempo.
%       POS=EVALPOS(T,TT,CASO,A) evalúa el polinomio de aceleración.
%       A matriz 5x3 que contiene los coeficientes de los polinomios
interpolados.
%       T vector tiempo normalizado.
%       TT segmentos de tiempo de aceleración, velocidad máxima y deceleración.
%       caso=1: Cada motor logra alcanzar su velocidad maxima.
%       caso=2: No hay tiempo de alcanzar la velocidad maxima de cada motor.
%
%       Ver también PLANIFICADOR, CALCULOCOEF, SINCRONIZADOR, EVALVEL, EVALACEL.

function pos = evalpos(t,tt,caso,A)

for i = 1:length(t)
   if caso == 1

      if (t(i)  <= 0)
         p  = A(1,1);
      elseif (t(i)>0)&(t(i)<=tt(1))
         ti = t(i)/tt(1);
         p  = A(1,1)+ A(1,2)*ti+ A(1,3)*ti^2+A(1,4)*ti^3+A(1,5)*ti^4;
      elseif (t(i)>tt(1))&(t(i)<=tt(2)+tt(1))
         ti =  (t(i)-tt(1))/tt(2);
         p  = A(2,1)+A(2,2)*ti;
      elseif (t(i)>tt(2)+tt(1))&(t(i)<=tt(3)+tt(2)+tt(1))
         ti =  (t(i)-tt(2)-tt(1))/tt(3);
         p  = A(3,1)+A(3,2)*(ti-1)+A(3,3)*(ti-1).^2+A(3,4)*(ti-
1).^3+A(3,5)*(ti-1).^4;
      elseif (t(i)>tt(3)+tt(2)+tt(1))
         p  = A(3,1);
      end;
   elseif caso==2
      if (t(i)  <= 0)
         p  = A(1,1);
```

```
      elseif (t(i)>0)&(t(i)<=tt(1))
         ti = t(i)/tt(1);
         p  = A(1,1)+ A(1,2)*ti+ A(1,3)*ti^2+A(1,4)*ti^3+A(1,5)*ti^4;
      elseif (t(i)>tt(1))&(t(i)<=tt(2)+tt(1))
         ti = (t(i)-tt(1))/tt(2);
         p  = A(2,1)+A(2,2)*(ti-1)+A(2,3)*(ti-1).^2+A(2,4)*(ti-
1).^3+A(2,5)*(ti-1).^4;
      elseif (t(i)>tt(2)+tt(1))
         p  = A(2,1);
      end;
   end;

  pos(i)=p;
end;

return
```

Para comprobar el funcionamiento del código desarrollado se sugiere al lector ejecute varias veces el fichero ejemplo.m que se encuentra en el directorio /Capítulo5 en el que se generan dos vectores aleatorios que definen dos posiciones de un robot de 6 grados de libertad, se calculan las trayectorias articulares haciendo uso de las funciones estudiadas y se grafican los polinomios $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$. Debe notarse que para cada ejecución, y dependiendo del máximo recorrido que deba efectuar la articulación más desfavorable en este sentido, el tiempo que tardará en alcanzar la posición final es diferente.

Ejemplo 5.1

Al ejecutar ejemplo.m se obtiene las gráficas de la posición, velocidad y aceleración de las seis articulaciones de un robot de 6 gdl que evolucione entre dos puntos aleatorios de su espacio de trabajo.

```
%-----------------------------------------------------------
%----programa de prueba del software de planificación -----
%----            interpolación 4-3-4                  -----
%-----------------------------------------------------------

clear

%--------------------------------------------------------------------
% q1 y q2 son las coordenadas articulares inicial y final
%--------------------------------------------------------------------
disp([' ']);
disp(['     Vectores q1 y q2 de las coordenadas articulares ']);
disp(['     inicial y final. ']);

q1 = rand(6,1)
q2 = rand(6,1)

%--------------------------------------------------------------------
% Llamada a la función PLANIFICADOR
%--------------------------------------------------------------------

[t,pos, vel, ace] = planificador(q1,q2);
```

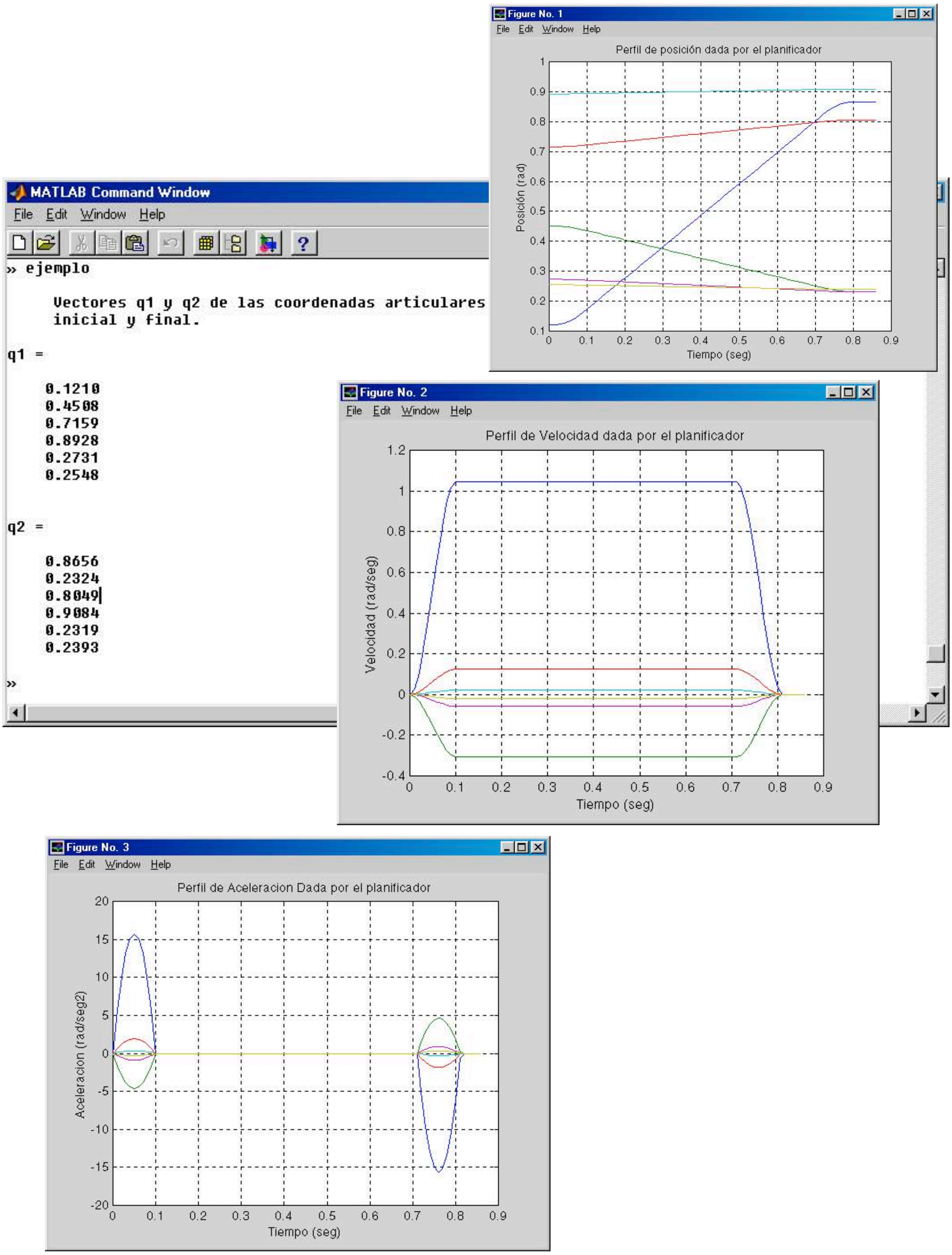
```
%-----------------------------------------------------------------------
% gráficas de los resultados
%-----------------------------------------------------------------------

figure
plot(t,pos)
grid
title('Perfil de posición dada por el planificador')
xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Posición (rad)')


figure
plot(t,vel)
grid
title('Perfil de Velocidad dada por el planificador')
xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Velocidad (rad/seg)')

figure
plot(t,ace)
grid
title('Perfil de Aceleracion Dada por el planificador')
xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Aceleracion (rad/seg2)')
```

Las siguientes figuras muestran ejemplos de ejecución del fichero ejemplo.m en los que se puede observar varios casos.



MATLAB Command Window
File Edit Window Help
» ejemplo
Vectores q1 y q2 de las coordenadas articulares
inicial y final.
q1 =
0.1210
0.4508
0.7159
0.8928
0.2731
0.2548
q2 =
0.8656
0.2324
0.8049
0.9084
0.2319
0.2393
»
Figure No. 1
File Edit Window Help
Perfil de posición dada por el planificador
Posición (rad)
Tiempo (seg)
Figure No. 2
File Edit Window Help
Perfil de Velocidad dada por el planificador
Velocidad (rad/seg)
Tiempo (seg)
Figure No. 3
File Edit Window Help
Perfil de Aceleracion Dada por el planificador
Aceleracion (rad/seg2)
Tiempo (seg)

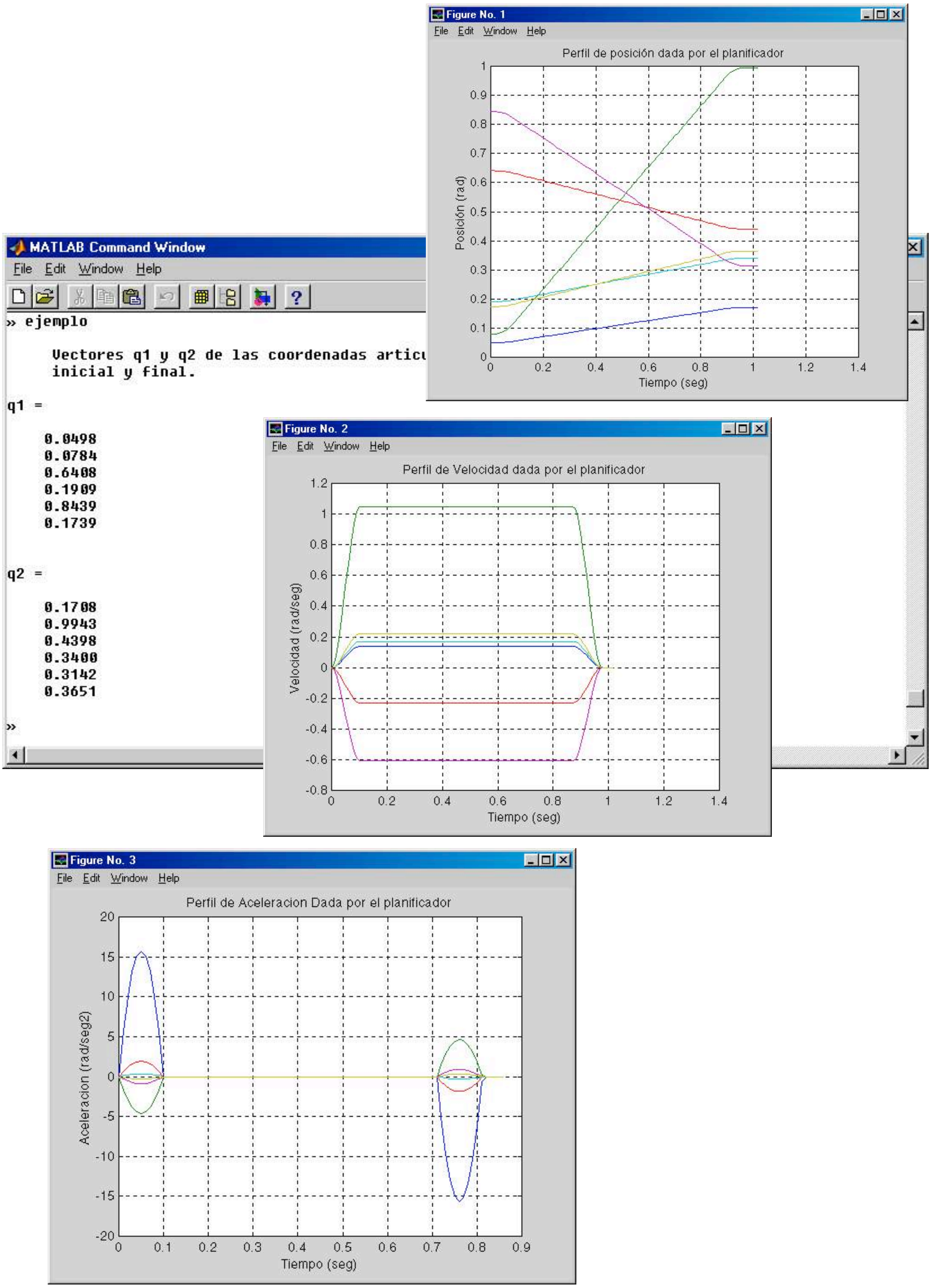


Figura 5.3.- Ejemplos de planificador coordinado.

a
n

⇒ Se recomienda al lector que realice varios ejemplos observando que la velocidad máxima siempre es la nominal de la articulación que mayores solicitudes temporales tiene. Es igualmente recomendable que el estudiante introduzca vectores q1 y q2 definidos por él, que definan posiciones fácilmente identificables y que observe las gráficas que resultan. Por ejemplo puede hacerse partir todas las articulaciones de su posición cero ($q1=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$) y observar lo que sucede con cada articulación.

Figura 5.4.- Robot rotacional de 6 gdl

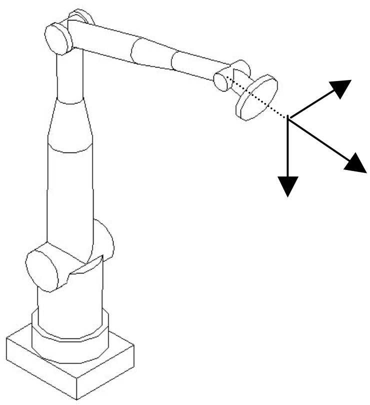
5.5.-PRACTICA. Animación de la trayectoria.

En este apartado se ilustra la herramienta teórica que se ha estudiado con los ejemplos de los robots de 4 y 6 gdl que sirven de apoyo a lo largo del libro.

Ejemplo 5.2

En este ejemplo se implementa en MatLab® un planificador de trayectorias coordinado. Se utiliza el robot rotacional de 6 gdl de la figura 5.4

Basándose en el esquema general presentado en el apartado 5.2, el primer paso es estudiar las necesidades de movimiento, especificar un punto inicial (posición y orientación) y un punto final (posición y orientación) y obtener las coordenadas articulares correspondientes a estos puntos nudo. Para ello se utilizan las funciones desarrolladas en la práctica 2 DENAVIT y INVERSEKINEMATIC6.



Hay que recordar en este punto lo estudiado en la práctica 2 sobre la posible existencia de múltiples soluciones en la cinemática inversa debido a las posibles configuraciones del codo y la muñeca del manipulador.

Se parte de dos puntos del espacio de trabajo del robot definidos por :

$P_1=(x_1,y_1,z_1,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$
$P_2=(x_2,y_2,z_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$

A partir de estos puntos se obtienen los vectores en coordenadas articulares correspondientes a los puntos inicial y final del camino que se quiere recorrer.

El siguiente ejemplo muestra como se ha utilizado la función INVERSEKINEMATIC6 para obtener los vectores q1 y q2 a partir de unas matrices homogéneas T1 y T2 que definen en coordenadas cartesianas la posición y orientación de dos puntos en el espacio de trabajo del robot.

```
» T1=[0 1 0 -0.3;1 0 0 -0.2;0 0 1 0.6; 0 0 0 1]

T1 =

         0    1.0000         0   -0.3000
    1.0000         0         0   -0.2000
         0         0    1.0000    0.6000
         0         0         0    1.0000

» T2=[0 0 1 -0.3;0 1 0 0.4;1 0 0 0.5; 0 0 0 1]

T2 =

         0         0    1.0000   -0.3000
         0    1.0000         0    0.4000
    1.0000         0         0    0.5000
         0         0         0    1.0000

» q1=inversekinematic6(T1,-1,1)

q1 =

   -2.5536
    0.7137
   -0.6729
    0.0000
   -0.0408
   -0.9828

» q2=inversekinematic6(T2,-1,1)

q2 =

    2.3306
    0.6579
   -0.2558
   -2.2892
    1.8437
   -0.2990

»
```

A partir de los vectores q1 y q2 se realiza un ejecuta el planificador que me proporciona los polinomios $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$ con las trayectorias articulares.

```
» [t,pos, velo, ace]=planificador(q1,q2);
»
```

```
» plot(t,pos)
» plot(t,vel)
» plot(t,ace)
```


Las polinomios pueden graficarse directamente en MatLab® mediante la orden plot.

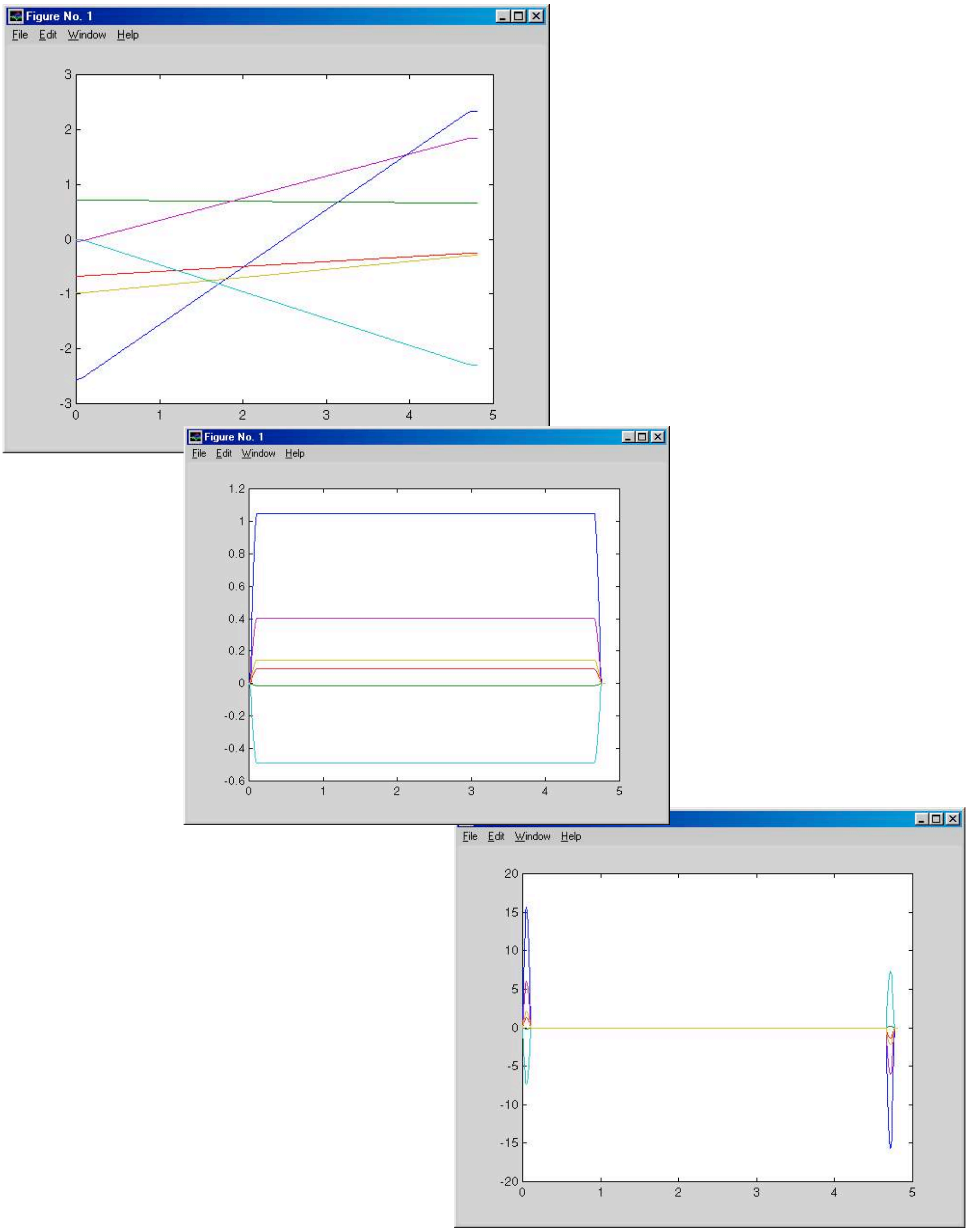


Figura 5.5.- Gráficas de la planificación del robot de 6 gdl

```
› animacion6(pos')
```


Debe notarse que en este caso el tiempo invertido en realizar la trayectoria es de casi 5 segundos, debido a que la articulación 1 realiza un recorrido de más de 1.5π radianes, siendo la velocidad máxima del motor que mueve esta articulación de 1/3π rad/seg.

Utilizando la misma función ANIMACION6 que se utilizó en la práctica 2 se puede visualizar el movimiento del robot observando el control de velocidad de las articulaciones.

Se debe observar que en esta ocasión se introduce como mat_q la traspuesta de la matriz pos que se ha obtenido del planificador, pues está ordenada de diferente manera que la matriz utilizada en la práctica 2.

Las siguientes imágenes muestran alguna secuencia de la animación calculada.

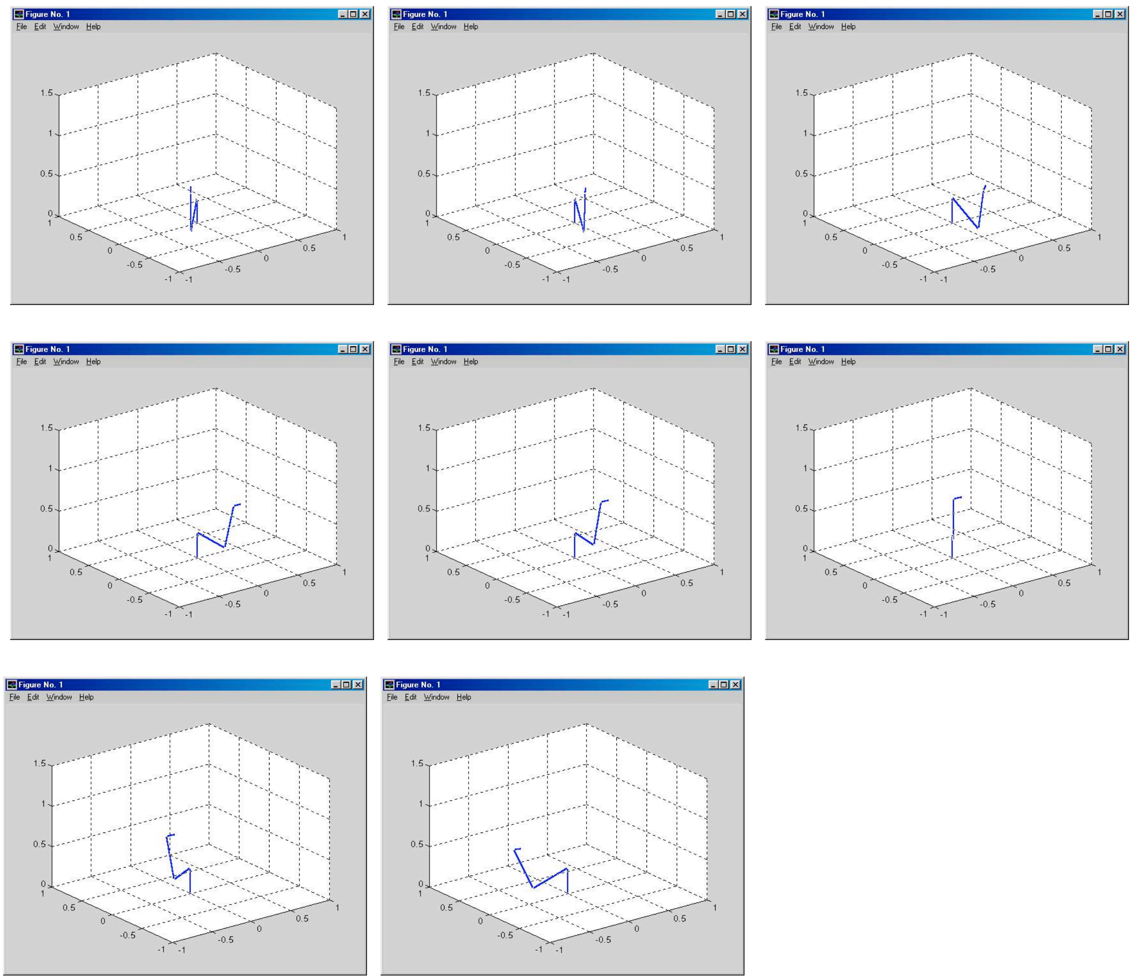


Figura 5.6.- Animación de la planificación del robot de 6 gdl